Beweise und Widerlegungen

Beides sind gewissermaßen zueinander „spiegelbildliche“ Prozeduren, denn eine Behauptung *widerlegen* heißt einfach nur *beweisen*, dass das (kontradiktorische) Gegenteil wahr ist (und umgekehrt). Dazu existieren lediglich fünf gültige Methoden:

a. Die direkten Methoden:	**1. Die Refutatio**
	2. Die Epagoge
	3. Die Inductio
b. Die indirekten Methoden	**4. Die Apagoge**
	5. Die Instantia

Der Unterschied zwischen (1) und (2) besteht darin, dass der Opponent im ersten Falle die *Gründe* (d.h. die Prämissen) bestreitet (*nego propositionem*: ich verneine die Voraussetzung), im zweiten hingegen die Gründe zugesteht, aber die *Folgerungen* daraus bestreitet (*nego consequentiam*: ich verneine die Schlussfolgerung).

1. Die Refutatio

Hierbei handelt es sich – im strengen Sinne – eigentlich nicht um eine Widerlegung, sondern lediglich um die *Zurückweisung* (einer) der Prämissen, auf die der Proponent seine Behauptung(en) stützt. Will ein Proponent z.B. irgendeine Behauptung auf die Voraussetzung zurückführen, dass der Mars aus grünem Käse bestehe, so wird vermutlich jeder Opponent diese Prämisse zurückweisen, weil sie, wie man sagt, der „Natur der Dinge“, dem gesunden Menschenverstand (common sense), der Lebenserfahrung, allgemein anerkannten wissenschaftlichen Erkenntnissen und/oder anderen Behauptungen widerspricht, die der Proponent sonst noch verficht.
Weist der Opponent *alle* Gründe zurück, aus denen der Proponent seine Behauptung(en) ableiten will, so kann eine Debatte darüber nicht stattfinden. (*Contra negantem principia non est disputandum*: Mit einem, der alle Prämissen zurückweist, lässt sich nicht streiten.)

2. Die Epagoge (griech. επαγωγη = Ausführung, Ableitung)

Dies ist der häufigste Fall: Der Proponent *beweist* seine Behauptung, indem er zeigt (*arguo* = ich zeige), dass sie entweder nach gültigen logischen Schlussregeln aus seinen Prämissen folgt (**Deduktion**) oder nach solchen auf diese zurückgeführt werden kann (**Reduktion**). Der Opponent *widerlegt*, indem er zeigt, dass dies *nicht* der Fall ist, die Behauptung also *nicht* aus den Prämissen folgt oder die Ableitung (Deduktion) einen Fehler (Trugschluss, *fallacia*) enthält.
Ein epagogischer Beweis kann sehr viele Schritte enthalten, die die Prämisse(n) logisch mit der Behauptung (dem zu Beweisenden) verknüpfen. Liegt ein Beweis erst einmal vor, so ist seine Rekonstruktion eine rein mechanische Prozedur, ein *Algorithmus*, den man auch als Computer-Programm schreiben könnte. Die *Auffindung oder Entdeckung* eines Beweises jedoch ist eine u.U. höchst *kreative* Leistung, die man (bisher) keinem Computer übertragen kann. Die berühmte FERMAT’sche Vermutung z. B. wurde erst nach 350 Jahren, nämlich 1995 von Andrew WILES bewiesen.

3. Die Inductio (Induktion)

Hierbei handelt es sich um den *Beweis durch (vollständige) Induktion*, ***der nur in den formalen Wissenschaften (Logik und Mathematik), nicht aber in den empirischen möglich ist***.

Er sei hier an einem einfachen Beispiel aus der Arithmetik demonstriert: Dabei erfolgt der Beweis stets in *zwei* Schritten: man beweist *zunächst*, dass eine bestimmte Behauptung über Zahlen für eine spezifische Zahl *n* wahr ist (d.h. aus den Axiomen der Arithmetik deduziert werden kann), und *hernach*, dass sie auch für jede nachfolgende Zahl *(n+1)* wahr sein muss.

Beispiel:

Versteht man unter dem Ausdruck Σ(n) jeweils die Summe der ersten n natürlichen Zahlen, so lässt sich die *Behauptung* aufstellen

$$\Sigma\,(n) = \tfrac{1}{2}\, n\, (n + 1)$$

(So ist etwa Σ (5) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 gleich ½ x 5 (5 + 1) = 2,5 x 6 = 15)
Zunächst wird gezeigt, dass die Formel für den Fall n = 1 (mit Σ (1) = **1**) zutrifft:

$$\Sigma\,(1) = \tfrac{1}{2} \times 1 \times (1 + 1) = \tfrac{1}{2} \times 1 \times 2 = \mathbf{1}$$

Dies ist also der Fall. Als nächstes ist zu beweisen, dass, wenn die Formel für eine beliebige natürliche Zahl *n* gilt, sie auch stets für deren Nachfolger *(n +1)* erfüllt sein muss:

$$\begin{aligned} \textit{Wenn}\ \Sigma\,(n) = \tfrac{1}{2}\, n\, (n+1)\ \textit{dann}\ \Sigma\,(n+1) &= \Sigma\,(n) + (n + 1) \\ &= \tfrac{1}{2}\, n\, (n + 1) + (n + 1) \end{aligned}$$

Durch Umformung erhält man daraus

$$\Sigma\,(n + 1) = \tfrac{1}{2}\, (n + 1)\, [\, (n + 1) + 1)\,]$$

Ersetzt man (n + 1) durch N, so ergibt sich

$$\Sigma\,(N) = \tfrac{1}{2}\, N\, (N + 1)$$

Da diese Gleichung exakt die gleiche Struktur hat wie die in der Behauptung, ist auch der zweite Schritt bewiesen.

Durch vollständige Induktion können ***nur formale Universalurteile*** bewiesen werden. *Empirische* Aussagen, die die Form von Universalurteilen („Alle A sind B“) haben, können durch Induktion deswegen nicht bewiesen werden, weil hier *kein* gültiger logischer Schlussmodus existiert, der es erlaubte, von einer Anzahl *besonderer* Einzelfälle auf die *Allgemeinheit* aller (u. U. unendlich vieler) Einzelfälle zu schließen. – Nachdem die Europäer über Jahrhunderte stets nur weiße Schwäne gesehen hatten, glaubten sie, die Aussage „Alle Schwäne sind weiß“ für wahr halten zu dürfen. Aber dieses Universalurteil ist gleichwohl *nicht beweisbar*, weil der *Induktionsschluss* von der – stets begrenzten – Zahl bisher beobachteter Schwäne auf alle künftig noch zu beobachtenden logisch *nicht gültig* (d.h. nicht selbst auf die Axiome der deduktiven Logik zurückführbar) ist.

Ausnahmen: a) Umfasst ein empirisches Universalurteil nur eine *begrenzte* Zahl von Einzelfällen, die alle bekannt sind – z.B. „Alle deutschen Kanzler

waren Männer“ – , so beruht die Wahrheit (oder Falschheit) eines solchen stets auf der empirischen Prüfung aller Einzelfälle, aber nicht auf Induktion. (Der Induktionsschluss, dass dann auch künftig alle deutschen Kanzler Männer sein müssten, ist auch hier natürlich nicht beweiskräftig).
b) Wird ein Begriff durch eine spezifische Eigenschaft (Attribut, Prädikat) *definiert*, so ist ein Universalurteil, das ihm diese Eigenschaft zuschreibt, zwar wahr, aber nicht, weil es auf einem induktiven Beweis beruhte, sondern weil es *tautologisch* ist. Das Universalurteil „Alle Schimmel sind weiß“ wird niemand zu widerlegen versuchen, indem er nach einem Schimmel fahndet, der *nicht* weiß ist, einfach weil der Begriff „Schimmel“ *per definitionem* ein weißes Pferd bezeichnet.
Im allgemeinen kann man sich an den „Merksatz“ halten, den Karl POPPER so formuliert hat: *Aussagen, die sich beweisen lassen, beziehen sich nicht auf die empirische Welt; Aussagen, die sich auf die empirische Welt beziehen, kann man nicht beweisen.*

4. Die Apagoge (von griech. απαγωγη; wörtlich eigentlich „Entführung“)
Hierbei handelt es sich zumeist um eine indirekte *Widerlegungs*-Methode. Der Opponent geht hier von der *Annahme* aus, die Behauptung des Proponenten oder eine seiner Prämissen *sei* wahr, zeigt dann jedoch, dass sich daraus durch logisch gültige Schlüsse eine Aussage deduzieren lässt, die bereits als falsch erwiesen wurde, vom Proponenten selbst als falsch anerkannt wird oder überhaupt völlig unsinnig ist. Nach dieser Methode wird also eine Behauptung *ad absurdum* geführt, und deswegen pflegt man, wenn dies gelingt, darunter zu schreiben: „q. e. a.“ (*quod est absurdum*), während unter einer epagogischen Beweisführung für gewöhnlich „q. e. d.“ (*quod erat demonstrandum*) steht. Selbstverständlich kann diese Methode aber auch als *Beweis-Methode* (*argumentum ex contrario*, auch „Beweis durch Widerspruch“ genannt) angewendet werden, indem der Proponent selbst zeigt, dass es zu absurden Folgerungen führen würde, wenn man annähme, das (kontradiktorische) Gegenteil seiner Behauptung sei wahr.

Beispiel:
Der folgende apagogische Beweis dafür, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, wurde bereits im 4. Jahrhundert v. Chr. von EUKLID geführt.
EUKLID ging jedoch dabei von der *Annahme* aus, $\sqrt{2}$ *sei* eine rationale Zahl, d. h. eine Zahl, die sich als Bruch darstellen lässt. Seiner Beweisführung liegen ferner die folgenden Prämissen zugrunde, deren Wahrheit er selbst bereits bewiesen hatte:

P 1: Das Produkt aus 2 und einer beliebigen natürlichen Zahl ist stets eine gerade Zahl. (Das ist die Definition einer geraden Zahl!)
P 2 : Ist das Quadrat einer Zahl gerade, so ist auch die Zahl selbst gerade.
P 3: Es ist unmöglich, einen Bruch *unendlich oft* zu kürzen.

Unter der Annahme, $\sqrt{2}$ sei rational, mithin als Bruchzahl darstellbar, lautet die *Behauptung*

$$\sqrt{2} = p/q$$

Daraus folgt:

$$2 = p^2 / q^2$$
$$2q^2 = p^2$$

Aus (P1) folgt, dass $2q^2$ gerade sein muss; demnach muss auch p^2 gerade sein, und aus (P2) folgt, dass dann auch p gerade ist. Ist aber p gerade, so kann man dafür, gemäss (P 1) auch 2m schreiben. Dadurch erhält man

$$2q^2 = (2m)^2 = 4m^2$$

Daraus folgt : $$q^2 = 2m^2$$

Aus den gleichen Gründen wie zuvor muss dann wiederum q^2 gerade sei und mithin auch q. Ergo kann q als 2n geschrieben werden, sodass gilt

$$\sqrt{2} = p/q = 2m/2n$$
$$= m/\ n$$

Zweifellos ist der Bruch m/n eine *Kürzung* des Bruchs p/q. Allerdings kann man nun auf den Bruch m/n dasselbe Verfahren wie zuvor auf den Bruch p/q erneut anwenden, um einen noch einfacheren (gekürzten) Ausdruck r/s zu erhalten. Mit diesem kann abermals ebenso verfahren werden – und so weiter ad infinitum. Daraus folgt:

√2 ist ein Bruch, der unendlich oft gekürzt werden kann
quod est absurdum,

denn dies steht in direktem Widerspruch zu (P 3) ! Da dieser Widerspruch aus der Behauptung folgt, √2 sei eine rationale Zahl, ist damit bewiesen, dass √2 *keine* rationale Zahl sein kann: sie ist mithin irrational, also nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen (bzw. als Dezimalzahl mit endlicher, nicht-periodischer Ziffernfolge nach dem Komma) darstellbar.

<u>5. Die Instantia</u> (griech. ενστασιζ; lat. *exemplum in contrarium*)
Hierunter versteht man einfach die Widerlegung eines Universalurteils, also einer *allgemeinen* Behauptung durch den direkten Nachweis *eines einzigen* Gegenbeispiels.
Seit die Engländer – z.B. in Neuseeland – auch schwarze Schwäne entdeckt haben, ist die Aussage „Alle Schwäne sind weiß“ widerlegt. Ersetzt man in der Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ (Pythagoras) den Exponenten 2 durch n, so erhält man die FERMAT'sche Vermutung. Sie wäre widerlegt gewesen, hätte man jemals nur ein Beispiel von vier Zahlen a, b, c, n gefunden, die sie erfüllen. (Inzwischen ist – übrigens durch vollständige Induktion – bewiesen, dass es solche vier Zahlen nicht geben kann, was FERMAT behauptet hatte)

<u>Ein Übungsbeispiel:</u>

Es wird behauptet	$a = b$	$\mid x\ a$
Daraus folgt	$a^2 = ab$	$\mid + a^2 - 2ab$
	$a^2 + a^2 - 2ab = ab + a^2 - 2ab$	
	$2(a^2 - ab) = a^2 - ab$	$\mid : (a^2 - ab)$
	$2 = 1$ *quod est absurdum*	

<u>Frage:</u> Ist damit die Behauptung (a = b) apagogisch widerlegt (sodass $a \neq b$ wahr sein müsste) *oder* enthält die ganze Beweisführung einen fatalen Fehler?