Wie "bastelt" man sich einen Kalkül ?

Ein Kalkül ist ein rein formales, deduktives System, das seinen eigenen deterministischen Regeln folgt und im übrigen keine weitere Bedeutung hat.
Um einen Kalkül zu konstruieren, benötigt man drei "Zutaten":

1. BASALE ODER ELEMENTE
Hierbei muss es sich weder um mathematische Objekte (wie z.B. Zahlen, Linien etc.) noch um logische Objekte (wie Begriffe, Aussagen, Variablen etc.) handeln (obwohl auch solche Objekte natürlich möglich sind). Als Elemente eines Kalküls können vielmehr auch sog. alphanumerische Objekte (ungedeutete Zeichen oder graphische Gebilde) in Betracht kommen. Im allgemeinen werden davon mindestens zwei benötigt.

2. AXIOME ODER INITIATOREN (ω)
Hierunter versteht man die Anfangs- oder Grundfiguren eines Kalküls. Man kann Kalküle mit *einem* Axiom (Initiator), mit mehreren oder sogar mit unendlich vielen Axiomen konstruieren.

3. DERIVATIONSREGELN ODER GENERATOREN (p)
Hierbei handelt es sich um die Regeln, nach denen die Folgefiguren (Elemente-Sequenzen) des Kalküls zunächst aus den Axiomen und hernach aus diesen Folgefiguren selbst generiert werden. Es muss mindestens eine solche Regel geben. Gibt es mehrere davon, so sind u.U. noch sog. **sequentielle Regeln** zu definieren, welche festlegen, ob stets *alle* Ableitungsregeln, die jeweils anwendbar sind, auszuführen sind (und wenn ja, in welcher Reihenfolge), ob sie alternierend anzuwenden sind oder dgl.

Die Folgefiguren (Sequenzen aus den Elementen), die durch (wiederholte) Anwendung der Derivationsregeln aus den Axiomen erzeugt werden können, heißen die **THEOREME DES KALKÜLS**. Die Anzahl der Derivations-Schritte, die nötig sind, um ein Theorem zu deduzieren, wird als (seine) **GENERATION** bezeichnet. Elemente-Sequenzen (sog. Strings), die nach den Derivationsregeln *nicht* aus den Axiomen generiert werden können, heißen **NON-THEOREME**. Eine Figur wird *bewiesen*, indem man demonstriert, dass sie ein Theorem des Kalküls ist; sie ist *widerlegt,* wenn man gezeigt hat, dass sie ein Non-Theorem darstellt.

EIN BEISPIEL:

1. Es werden zwei **Elemente** (oder Basale) eingeführt, nämlich

□ und ○

Um sie mündlich zu bezeichnen, kann man sie "Kästchen" und "Kreis" nennen.

2. Es werden zwei **Derivations-Regeln** (Generatoren) definiert, und zwar:

p(1) : ○ ⇨ ○ □
p(2) : □ ⇨ ○

Dabei bedeutet der Pfeil (⇨), dass in jeder neuen Generation stets das Element links von ihm durch das Element bzw. die Sequenz (den String) rechts davon ersetzt werden soll.

3. Der Kalkül habe nur ein **Axiom** (einen Initiator); dieses lautet:

ω : ○

Die ersten Theoreme des Kalküls lauten demnach:

○	0. Generation (Axiom)
○ □	1. Generation
○ □ ○	2. Generation
○ □ ○ ○ □	3. Generation
○ □ ○ ○ □ ○ □ ○	4. Generation
....	

Fragen:
a. Ist der String ○ ○ □ ○ □ beweisbar (ein Theorem dieses Kalküls)?
b. Wie lautet die 5. Generation in diesem Kalkül ?
c. Kann ein Theorem mit 3 "Kreisen" hintereinander auftreten?

<u>EIN WEITERES BEISPIEL:</u>

1. Dieser Kalkül hat vier **Basale** (Elemente), nämlich

♣ ♦ ♥ und ♠

2. Es sind die folgenden fünf **Generatoren** definiert:

p(1) : ♦ ⇒ ♥ ♦
p(2) : ♠ ⇒ ♦ ♥ ♠
p(3) : ♣ ⇒ ♥ ♠ ♣
p(4) : ♥ ♠ ⇒ ♠
p(5) : ♥ ♦ ⇒ ♣

3. Ein **Axiom** laute: ω (1) : ♥ ♠

Dann ergeben sich die Theoreme:

Gen.	**Theorem**	**angew. Regeln**
0	♥ ♠	Axiom ω (1)
1	♠	4
2	♦ ♥ ♠	2
3	♥ ♦ ♠	1, 4
4	♣ ♦ ♥ ♠	5, 2
5	♥ ♠ ♣ ♥ ♦ ♠	3, 1, 4
6	♠ ♥ ♠ ♣ ♣ ♦ ♥ ♠	4, 3, 5, 2
7	♦ ♥ ♠ ♠ ♥ ♠ ♣ ♥ ♠ ♣ ♥ ♦ ♠	2, 4, 3, 3, 1, 2

<u>Fragen:</u>

a. Wie lautet das Theorem der 8. Generation ?
b. Wie lauten die weiteren Theoreme (7 Generationen) des Kalküls, wenn dieser noch ein zweites Axiom, nämlich ω (2) : ♦, hat ?
c. Gibt es unter diesen eines, das sich auch aus ω (1) deduzieren lässt ?

EINIGE GRUNDLAGEN DER AUSSAGEN-LOGIK

Eine (deskriptive) Aussage ist eine sprachliche Verlautbarung, die einen Sachverhalt behauptet und die Eigenschaft besitzt, nur **wahr oder falsch** sein zu können.
Die Aussagenlogik untersucht, welcher **Wahrheitswert** (wahr oder falsch) bestimmten **Verknüpfungen von Aussagen** zukommt. Dabei werden die zu verknüpfenden Aussagen als **Variablen** behandelt und für gewöhnlich mit **p und q** bezeichnet.
Der zweiwertige Kalkül der Aussagenlogik ist strukturidentisch (isomorph) mit dem der Axiomatischen Mengentheorie und dem der sog. Schaltalgebra. Deswegen lassen sich sämtliche Verknüpfungen der Aussagenlogik sowie alle daraus abgeleiteten Schlussfiguren grundsätzlich auch mengentheoretisch (z.B. durch Mengen-Diagramme) oder schaltalgebraisch (z.B. durch elektrische oder elektronische Schaltungen) darstellen.
Das wichtigste Darstellungsmittel in der Aussagenlogik sind die sog. **Wahrheits-Tafeln**, aus denen hervorgeht, welcher Wahrheitswert der jeweiligen Verknüpfung von p und q zukommt, je nachdem ob p bzw. q wahr oder falsch sind. Zur Symbolisierung der verschiedenen Verknüpfungen werden dabei bestimmte Zeichen (Funktoren, auch Junktoren genannt) verwendet.

Die wichtigsten Verknüpfungen und ihre Wahrheits-Tafeln:

1. Die Negation

Der Negator ¬ (gesprochen: non) verwandelt die Aussage p, wenn sie wahr ist, in eine falsche (die Negation), und umgekehrt.
In der Mengentheorie entspricht dies der Komplementbildung.

p	¬ p
W	F
F	W

p: München liegt an der Isar
¬ p: München liegt nicht an der Isar

2. Die Konjunktion

Der Konjunktor ∧ (gesprochen: und) verknüpft zwei Aussagen p und q so, dass die Verknüpfung nur dann wahr ist, wenn beide Teilaussagen wahr sind.
Mengentheoretisch: Bildung der Schnittmenge.
Schaltalgebra: die sog. Hintereinander-Schaltung

p	q	p ∧ q
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

17 ist eine Primzahl und 25 eine Quadratzahl (wahr, weil beide Teilaussagen wahr sind)
Eidechsen sind Reptilien und Frösche sind Säugetiere (falsch, weil q falsch ist)

3. Die Disjunktion

Der Disjunktor $\vee$ (gesprochen: oder/und) verknüpft p und q so, dass die Verknüpfung wahr ist, wenn mindestens eine Der Teilaussagen wahr ist. (Das "oder" ist also hier im *nicht* ausschließenden Sinne zu verstehen)
Mengentheoretisch: Bildung der Vereinigungsmenge.
Schaltalgebra: Die sog. Parallelschaltung

p	q	$p \vee q$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Eidechsen sind Reptilien und/oder Frösche sind Säugetiere (wahr, obwohl q falsch ist !)
Sokrates war Römer und/oder lebte in Neapel (falsch, weil p und q falsch sind)

4. Die Implikation

Der Implikator $\rightarrow$ (gesprochen: impliziert) verknüpft p und q so, dass die Verknüpfung (wenn p, dann q) nur dann falsch ist, wenn p wahr und zugleich q falsch ist.
Der Vordersatz p heißt dabei Implikans und der Hintersatz q Implikat. Die Implikation darf auf keinen Fall mit einer **kausalen** Folge verwechselt werden!

p	q	$p \rightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Die Implikation ist für Anfänger oft schwer verständlich. Sie ist die rein formale Struktur der sog. **hinreichenden** Bedingung. (Genauer also: Stets dann, wenn p so q)
Wenn es regnet, so ist die Straße nass (wahr, weil p und q wahr sind)
Wenn München an der Isar liegt, so liegt Dresden am Rhein (falsch, da q falsch ist)
Wenn 9 eine Primzahl ist, so ist Wasser leichter als Luft (wahr, da p und q falsch sind!)
Wenn 27 eine Primzahl ist, so wirkt Rauchen krebsfördernd (wahr, obwohl p falsch ist!)

5. Die Replikation

Diese gleicht der Implikation, ist jedoch nur dann falsch, wenn p falsch ist und zugleich q wahr. Der Replikator ist $\leftarrow$ und kann mit "nur dann wenn p, so q" umschrieben werden. Die Replikation ist die formale Struktur der sog. **notwendigen** Bedingung.

p	q	$p \leftarrow q$
W	W	W
W	F	W
F	W	F
F	F	W

Eine Person kann nur zu Gefängnis verurteilt werden, wenn sie strafmündig ist.

6. Die Exklusion (oder Antivalenz)

Der Exklusor / hat die Bedeutung des ausschließenden "oder" (im Sinne von entweder/oder). Sie ist nur dann falsch, wenn beide Teilsätze wahr sind, weil sie besagt, dass **mindestens** einer von beiden falsch ist.
In der Mengentheorie entspricht diese Operation der sog. symmetrischen Differenz.

p	q	$p \,/\, q$
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

Dieses Auto ist entweder ein Opel oder es ist ein Ford. (Es könnte aber auch keins von beidem sein, etwa ein Mercedes!) Einander exkludierende Urteile nennt man auch **konträr**.

7. Die Äquivalenz

Diese Aussagefunktion ist genau dann wahr, wenn p und q den gleichen Wahrheitswert haben, und falsch, wenn dieser verschieden ist. Die Äquivalenz stellt die formale Struktur der **notwendigen und hinreichenden** Bedingung dar. Der Funktor $\leftrightarrow$ (Äquivalentor) kann mit "genau dann, wenn ... so" umschrieben werden.

p	q	$p \leftrightarrow q$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Wenn der Heilige Abend auf einen Dienstag fällt, ist am folgenden Neujahrstag Mittwoch.
Wenn 36 eine Primzahl ist, so liegt München an der Isar (wahr !)
Wenn New York die Hauptstadt der USA ist, ist London die Hauptstadt Englands (falsch)

8. Die Kontravalenz

Diese Aussagefunktion ist das genaue Gegenstück zur Äquivalenz: sie ist genau dann wahr, wenn die Wahrheitswerte von p und q verschieden sind, und falsch, wenn diese gleich sind. Die Wahrheitstafel dafür ist also aus der vorigen leicht zu konstruieren. Kontravalent sind stets Aussagen, die man sonst als **kontradiktorisch** bezeichnet. Der Kontravalentor wird symbolisiert als $\succ\!\!\!-\!\!\!\prec$.

Diese Zahl ist durch 9 teilbar oder sie ist nicht durch 9 teilbar.

*****

Auf der Grundlage der genannten Aussagefunktionen lassen sich elementare **Schlussmuster** beweisen, unter denen hier nur die wichtigsten genannt seien:

1. Der Modus ponens

$$(p \rightarrow q) \wedge p \quad \rightarrow \quad q$$

Dies kann als ein Schluß mit zwei Prämissen und einer Folgerung aufgefaßt werden:

Wenn p wahr ist, dann ist q wahr (p impliziert q)
p ist wahr

Also ist q wahr

Wenn Peter Grippe hat, dann ist er krank. - Peter hat Grippe.
Also ist er krank.

2. Der Modus tollens

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg q \quad \rightarrow \neg p$$

Wenn Peter Grippe hat, dann ist er krank.- Peter ist nicht krank.
Also hat er auch nicht die Grippe.

3. Die Disjunktions-Regeln (Abtrennungsregeln)

$$(p \vee q) \wedge \neg p \rightarrow q$$
$$(p \vee q) \wedge \neg q \rightarrow p$$

4. Die Exklusions-Regeln

$$(p / q) \wedge q \rightarrow \neg q$$
$$(p / q) \wedge \neg q \rightarrow q$$

Zur Syllogistik (Schluss-Logik) I

Die auf ARISTOTELES zurückgehende Syllogistik ist das Kernstück der Schlusslehre. Auch hier werden **Variablen** verwendet, aber dies sind diesmal nicht Aussagen, sondern **Begriffe (Klassen)**, die in einem ganz bestimmten Verhältnis zu einander stehen müssen. Man unterscheidet **vier Arten von Urteilen**, nämlich

(a) **universell-positive** vom Typ "Alle A sind B"
(e) **universell-negative** vom Typ "Alle A sind nicht B"/ "Kein B ist A"
(i) **partikulär-positive** vom Typ " Einige A sind B"
(o) **partikulär-negative** vom Typ "Einige A sind nicht B"

Gemäß den vier generellen Schemata (**Figuren**)

$$(M \odot P) \wedge (S \odot M) \rightarrow (S \odot P) \quad \text{mit } \odot \equiv \{a, e, i, o\}$$
$$(P \odot M) \wedge (S \odot M) \rightarrow (S \odot P)$$
$$(M \odot P) \wedge (M \odot S) \rightarrow (S \odot P) \quad \text{und}$$
$$(P \odot M) \wedge (M \odot S) \rightarrow (S \odot P)$$

werden die Klassen (oder Mengen) S, M und P durch jeweils zwei **Prämissen** (p1, die sog. propositio maior, und p2, die propositio minor) so miteinander verknüpft, dass sich als Implikat die sog. **Conclusio** (c) ergibt. Dabei stellt S, das Subjekt der Conclusio, den **Oberbegriff**, und P, das Prädikat der Conclusio, den **Unterbegriff** dar, während M als **Mittelbegriff** bezeichnet wird. Die Inklusionsbeziehung dieser drei Mengen muß stets genau beachtet werden! Die vier Figuren (drei davon heißen aristotelisch, die vierte galenisch) unterscheiden sich nur durch die Stellung des Mittelbegriffs in den Prämissen. Indem man in die obigen Schemata dieser vier Figuren jeweils alternierend die 4 Urteilsformen einsetzt, ergeben sich insgesamt **256 mögliche Syllogismen** (vier mal 64 sog. Modi). Davon sind allerdings **nur 19 gültig** oder korrekt. (Streng genommen, gibt es noch 5 weitere, aber dabei handelt es sich nur um Abwandlungen der 19 gültigen). Ein Syllogismus ist nur dann gültig oder schlüssig, wenn aus der (angenommenen) Wahrheit der Prämissen immer, grundsätzlich und allgemein

die Wahrheit der Conclusio folgt (und nicht nur zuweilen). Ebendies muss stets bewiesen sein.
Die gültigen Schlussmuster werden seit der Scholastik mit dreisilbigen Merkwörtern bezeichnet, deren Vokale auf die verwendeten Urteilsformen der Prämissen und der Conclusio verweisen. Der bekannteste ist der sog. **Modus barbara** mit dem ewig langweiligen Beispiel

p1 : Alle Menschen (M) sind sterblich (P)	**a**-Urteil
p2 : Sokrates (S) ist ein Mensch (M)	**a**-Urteil
--	
c : Also ist Sokrates (S) sterblich (P)	**a**-Urteil

Wie sieht die Inklusionsbeziehung von S, M und P als Mengendiagramm aus ?
Ein anderes Beispiele wäre etwa der **Modus celarent**:

p1 : Kein Mohammedaner trinkt Alkohol	**e**-Urteil
p2 : Alle Derwische sind Mohammedaner	**a**-Urteil
--	
c : Kein Derwisch trinkt Alkohol	**e**-Urteil

Wie sähe das Mengendiagramm für diesen Fall aus ?
Ein letztes Beispiel: der **Modus ferio**:

p1 : Keine Quadratzahl ist eine Primzahl	**e**-Urteil
p2 : Einige gerade Zahlen sind Quadratzahlen	**i**-Urteil
--	
c : Einige gerade Zahlen sind keine Primzahlen	**o**-Urteil

Zu welcher Figur gehört dieser Schluss und wie sieht das zugehörige Mengendiagramm aus?

Außerordentlich wichtig ist, dass man die folgenden drei Tatsachen genau erfasst:

1. Die **logische Wahrheit** eines Syllogismus ist durch die Gültigkeit des jeweiligen Schlussmusters (Modus) verbürgt, sagt aber überhaupt nichts über die **faktische** (empirische) Wahrheit der darin enthaltenen Urteile aus.

2. Die Schlussfolgerung (Conclusio) ist stets **nur dann** wahr, **wenn** die Prämissen wahr sind. Sind diese **beide** falsch, so ist es auch die Conclusio. Aus **wahren** Prämissen können jedoch stets nur **wahre** Sätze folgen.

3. Aus einer faktisch falschen Prämisse kann eine **wahre** Conclusio folgen! Eben deshalb lässt sich von der faktischen Wahrheit einer Conclusio niemals auf die faktische **Wahrheit** der Prämissen zurückschließen. Ist jedoch die Conclusio faktisch falsch, so lässt sich sehr wohl auf die faktische **Falschheit** wenigstens einer der Prämissen zurückschließen.

Die folgenden Beispiele (alle im Modus barbara) mögen dies verdeutlichen:

p1 : Alle Katzen sind Zitronen
p2 : Petrus ist eine Katze
----
c : Petrus ist eine Zitrone

Dieser Schluss ist logisch wahr!

p1 : Alle Bayern sind Menschen (W)
p2 : Sokrates ist ein Bayer (F)
----
c : Sokrates ist ein Mensch (W)

Aus einer falschen Prämisse folgt eine wahre Conclusio.

p1 : Alle Menschen sind unsterblich (F)
p2 : Sokrates ist ein Mensch (W)
----
c : Sokrates ist unsterblich (F)

Aus der Falschheit der Conclusio kann auf die Falschheit wenigstens einer Prämisse zurückgeschlossen werden. (Man kann jedoch nicht erschließen, *welches* die falsche ist und ob nur *eine* falsch ist!)

p1 : Alle Katzen sind unsterblich (F)
p2 : Sokrates ist eine Katze (F)
----
c : Sokrates ist unsterblich (F)

In diesem Falle sind sogar beide Prämissen falsch.

Lewis CARROLL

Um sich klar zu machen, dass die Schlussfolgerungen aus syllogistischen Prämissen keineswegs immer so "trivial" sind wie es bei den üblichen Beispielen oft den Anschein hat, befasse man sich mit der folgenden Aufgabe, die sich der berühmte Autor von "Alice in Wonderland", Lewis CARROLL (von Hause aus Mathematiker), ausgedacht hat:
CARROLL definiert zunächst einmal die folgenden vier Mengen:

- **A** : die Menge der Personen, die ein Krokodil zu bändigen verstehen
- **B** : die Menge aller Babys
- **C** : die Menge derjenigen Menschen, denen man keine besondere Anerkennung zuteil werden lässt
- **D** : die Menge der Personen, die nach logischen Überlegungen zu handeln vermögen

Des weiteren führt er die folgenden drei Prämissen ein:

- p1 : Babys handeln unlogisch
- p2 : Niemandem wird Anerkennung versagt, der ein Krokodil zu bändigen weiß
- p3 : Unlogischen Personen zollt man keine Anerkennung

Unter den folgenden fünf Behauptungen befindet sich eine, die **nicht** aus diesen Prämissen folgt. Welche ist das ?

a. Ein Baby kann kein Krokodil bändigen
b. Ein Krokodilbändiger ist kein Baby
c. Eine unlogisch handelnde Person ist kein Krokodilbändiger
d. Eine hoch angesehene Person ist kein Baby
e. Logisch handelnde Menschen bändigen keine Krokodile

Hilfe: Stellen Sie die vier Mengen in einem Mengendiagramm dar und vergewissern Sie sich zunächst (durch Komplementbildung), dass die folgenden Aussagen zutreffen:

Wer logisch handelt, ist erwachsen;
Nicht anerkannt sind alle, die kein Krokodil bändigen können;
Angesehene Personen handeln logisch.

Zur Syllogistik II

Abhängig davon, ob wir über alle S oder nur über einige S sprechen und abhängig davon, ob wir davon reden, dass alle Dinge P sind oder nicht-P, ergeben sich vier Arten von Aussagen über zwei Eigenschaften:

Typ	Beispiel	allgemeine Form	Name der Form
A	Alle Hunde sind haarig	Alle S sind P	*Universelle Affirmation*
I	Einige Hunde sind haarig	Einige S sind P	*Partikuläre Affirmation*
E	Kein Hund ist haarig	Kein S ist P	*Universelle Negation*
O	Einige Hunde sind nicht-haarig	Einige S sind nicht-P	*Partikuläre Negation*

Die mittelalterlichen Logiker, die ihren ARISTOTELES gut kannten, haben diese Typen mit den Buchstaben A, I, E und O bezeichnet - vermutlich in Anlehnung an das lateinische <u>*A*ff*I*rmo</u> (ich bejahe) und n*E*g*O* (ich verneine).

ARISTOTELES interessierte sich dafür, wie man zwei dieser Aussagen zusammensetzen kann, um eine Schlussfolgerung zu erhalten. Ein Schluss mit zwei Prämissen und einer Conclusio heißt »Syllogismus«. Der bekannteste Syllogismus ist wahrscheinlich die olle Kamelle:

Alle Menschen sind sterblich	*Alle M sind P*
Sokrates ist ein Mensch	*Alle S sind M*
------------------------------------	------------------------------------
Sokrates ist sterblich	*Alle S sind P (l: AAA)*

In der Analyse solcher Syllogismen nennt man die beiden oberen Zeilen »Prämissen«, die dritte »Conclusio«. Die erste Eigenschaft, die in der Conclusio auftritt, wird mit S (für Subjekt) bezeichnet, die zweite wird durch P (für Prädikat) symbolisiert. In jedem gültigen Syllogismus gibt es noch eine dritte Eigenschaft, die M (für Mittelbegriff) genannt und in beiden Prämissen erwähnt wird. Im obigen Syllogismus ist »Sokrates sein« die Eigenschaft S, »sterblich sein« die Eigenschaft P und »Mensch sein« die Eigenschaft M.

Es gibt zwei Arten, einen Syllogismus zu kennzeichnen. Die eine Kennzeichnung bezieht sich auf die Art der Sätze, mit denen man ihn bildet. Im Sokrates-Syllogismus von oben sind alle drei Sätze vom universell affirmativen Typ A. Man sagt deshalb, der Syllogismus sei im »Modus« AAA. Andere Modi sind EIO, AOO und so weiter. Alles in allem gibt es 4 mal 4 mal 4, also 64 Modi.
Der AAA-Modus wird manchmal auch Barbara genannt, bArbArA. Hierbei ist »Barbara« kein Mädchenname, sondern der Plural des lateinischen Wortes »barbarus« (= Barbar). Sogar Barbaren können einfache Syllogismen im Modus AAA zusammensetzen.

Die andere Möglichkeit, einen Syllogismus zu kennzeichnen, hängt mit der Anordnung der Eigenschaften P, M und S in den beiden Prämissen zusammen. Es gibt hierfür vier Möglichkeiten, die man auch »Grundfiguren« nennt,.

	erste Grundfigur	zweite Grundfigur	dritte Grundfigur	vierte Grundfigur
Erste Prämisse	M-P	P-M	M-P	P-M
Zweite Prämisse	S-M	S-M	M-S	M-S
Conclusio	S-P	S-P	S-P	S-P

lnsgesamt gibt es vier Grundfiguren und vierundsechzig mögliche Modi. Das macht 4 mal 64 gleich 256 mögliche Syllogismen. Davon sind aber nur *neunzehn* korrekt (d. h. beweisbar).

Die Zahlen und Buchstaben rechts von jedem Syllogismus beziehen sich auf das oben erwähnte Klassifikationssystem. Die drei Buchstaben geben jedesmal den Typ der Sätze an, und zwar in der Reihenfolge von oben nach unten. Das ist der »Modus« des Syllogismus. Die Zahlen bezeichnen die Grundfigur des Syllogismus. (Anmerkung: Tatsächlich gibt es noch weitere fünf gültige Formen des Syllogismus. Das sind die Formen 1:AAI, 1:EAO, 2:AEO, 2:EAO und 4:AEO. Jede dieser Formen ist eine Abwandlung einer der grundlegenden neunzehn gültigen Formen.)

Nach seinem Tode im Jahre 322 v.Chr. wurden die logischen Schriften von Aristoteles in einem Buch gesammelt, das unter dem Titel »Organon« bekannt geworden ist. »Organon« bedeutet soviel wie »Instrument der Wissenschaft«. Tausende und Abertausende von jungen Männern haben die aristotelische Logik an den Universitäten des Mittelalters studiert. Ein recht weit verbreiteter Text waren die »Introductiones in Logicam« von William of SHYRESWOOD, in Paris in der ersten Hälfte des dreizehnten Jahrhunderts erschienen. Interessant an diesem Buch ist unter anderem ein mnemotechnisches Nonsensgedicht, das den Studenten helfen sollte, sich die Modi der korrekten Syllogismen in jeder Grundfigur zu merken:

Barbara celarent darii ferio baralipton
Celantes dabitis fapesmo frisesomorum;
Cesare campestres festion baroco; darapti
Felapton disamis datisi bocardo ferison.

Beispiele für jeden der neunzehn korrekten Syllogismen.

Beim Durchlesen sollte man daran denken, dass die Gesetze der Syllogistik dem Denken garantieren, dass – *obwohl* die Prämissen wahr oder falsch sein können – die conclusio *immer* wahr ist, *wenn* die Prämissen wahr sind. Rechts neben den Schluss-Beispielen werden (fettgedruckt) jeweils die zugehörige syllogistische Figur (siehe oben) sowie die Buchstaben für die Urteilsformen angegeben.

Zur Übung: Halten Sie bei jedem Beispiel mit einem Lineal die Conclusio verdeckt und prüfen Sie, ob Sie logisch denken (d. h. die richtige Conclusio – ohne Raten! – erschließen) können !

Schlaue Köpfe tragen Brillen.	Alle M sind P	
Wissenschaftler sind schlaue Köpfe.	Alle S sind M	
Wissenschaftler tragen Brillen.	*Alle S sind P*	**1: AAA**
Kein Bettler ist aufrichtig.	Kein M ist P	
Alle Wanderprediger sind Bettler	Alle S sind M	
Kein Wanderprediger ist aufrichtig	*Kein S ist P*	**1: EAE**
Alle Männer sind Bestien.	Kein M ist P	
Einige Heilige sind Männer.	Einige S sind M	
Einige Heilige sind Bestien.	*Einige S sind P*	**1: AII**
Der einzige gute Schriftsteller ist ein toter Schriftsteller.	Kein M ist P	
Einige Amerikaner sind gute Schriftsteller	Einige S sind M	
Einige Amerikaner sind tot.	*Einige S sind nicht-P*	**1: EIO**
Kein Arzt ist enthusiastisch.	Kein P ist M	
Du bist enthusiastisch.	Alle S sind M	
Also bist Du kein Arzt.	*Kein S ist P*	**2: EAE**
Alle Hunde haben ihren guten Tag.	Alle P sind M	
Kein Geizhals hat einen guten Tag.	Kein S ist M	
Kein Hund ist ein Geizhals.	*Kein S ist P*	**2: AEE**
Kein Präsident ist schwachsinnig.	Kein P ist M	
Einige Ungebildete sind schwachsinnig.	Einige S sind M	
Einige Ungebildete sind keine Präsidenten.	*Einige S sind nicht-P*	**2: EIO**
Alle guten Bücher sind lesenswert.	Alle P sind M	
Einige gute Klassiker sind nicht lesenswert.	Einige S sind nicht-M	
Einige Klassiker sind keine guten Bücher.	*Einige S sind nicht-P*	**2: AOO**
Alle Wochenenden spiele ich Golf.	Alle M sind P	
Einige Wochenenden verbringe ich mit meinem Vater	Einige M sind S	
Manchmal spiele ich Golf mit mit Vater	*Einige S sind P*	**3: AII**
Kein Mensch ist eine Insel.	Kein M ist P	
Einige Menschen schwimmen.	Einige M sind S	
Einige schwimmenden Dinge sind keine Inseln	*Einige S sind nicht-P*	**3: EIO**

An einigen Tagen bin ich glücklich.	Einige M sind P	
Jeden Tag bin ich traurig.	Alle M sind S	
An einige Tagen bin ich glücklich, wenn ich traurig bin.	*Einige S sind P*	**3: IAI**
Einige Frauen sind nicht hübsch.	Einige M sind nicht-P	
Alle Frauen sind liebenswert	Alle M sind S	
Einige liebenswerte Frauen sind nicht hübsch	*Einige S sind nicht-P*	**3: OAO**
Sexualität ist schmutzig.	Alle M sind P	
Sexualität ist heilig	Alle M sind S	
Einige heiligen Dinge sind schmutzig.	*Einige S sind P*	**3: AAI**
Keine Frage ist dumm.	Kein M ist P	
Alle Fragen sind nützlich	Alle M sind S	
Einiges Nützliche ist nicht dumm.	*Einige S sind nicht-P*	**3: EAO**
Alles, was er liebt, ist esoterisch.	Alle P sind M	
Keine esoterische Dinge kommen im Fernsehen vor.	Kein S ist P	
Nichts im Fernsehen liebt er.	*Kein S ist P*	**4: AEE**
Kein Krimineller ist freundlich.	Kein P ist M	
Einige freundliche Leute sind arm.	Einige M sind S	
Einige arme Leute sind nicht kriminell.	*Einige S sind nicht-P*	**4: EIO**
Einige wichtige Wahrheiten sind offensichtlich.	Einige P sind M	
Alles Offensichtliche ist stumpfsinnig.	Alle M sind S	
Einige stumpfsinnige Dinge sind wichtige Wahrheiten.	*Einige S sind P*	**4: IAI**
Alle Personen sind Objekte.	Alle P sind M	
Alle Objekte sind Formen im Hilbertraum.	Alle M sind S	
Einige Objekte im Hilbertraum sind Personen.	*Einige S sind P*	**4: AAI**
Keine meiner Erklärungen benötigt langes Lesen	Kein P ist M	
Dinge, die langes Lesen benötigen, sind tiefsinnig.	Alle M sind S	
Einige tiefsinnige Dinge werden von mir nicht erklärt.	*Einige S sind nicht-P*	**4: EAO**

Aus: Rudi RUCKER – Der Ozean der Wahrheit; Krüger, Frankfurt/M. 1988

DIE PRINZIPIEN (ODER AXIOME) DER KLASSISCHEN LOGIK

I. DAS PRINCIPIUM IDENTITATIS

Begriffslogische Fassung:

symbolisch:	$A \equiv A$
in Worten:	Ein Jegliches ist mit sich selbst identisch.
Beispiel:	Eine Rose ist eine Rose

Prädikatenlogische Fassung.: Hat ein x die Eigenschaft oder das Prädikat a, sodass x(a), so gehört es zur Klasse A , deren Elemente die Eigenschaft a besitzen: $x \in A$

Aussagenlogische Fassung.:

symbolisch:	$\vdash A \rightarrow A$ *)
in Worten:	Jede Aussage impliziert sich selbst. Oder: Für alle Aussagen gilt: Wenn A (wahr ist), dann (ist) A (wahr).

II. DAS PRINCIPIUM CONTRADICTIONIS

Begriffslogische Fassung:

symbolisch:	$A \neq \neg A$
in Worten	Ein Jegliches ist niemals, was es nicht ist.
Beispiel:	Ein Rabe ist kein Nichtrabe (Aber: ein Baby - oder ein Weinglas - ist ein Nichtrabe!)

Prädikatenlogische Fassung: Hat ein x die Eigenschaft (das Prädikat) a, sodass x(a), so gehört es nicht zur Klasse A' aller Dinge, die die Eigenschaft a nicht besitzen: $x \notin A'$

Aussagenlogische Fassung:

symbolisch:	$\vdash \neg (A \wedge \neg A)$ (Konjunktion)
in Worten:	Es ist niemals wahr, dass eine Aussage A und die gegenteilige (verneinte) gleichzeitig beide wahr sind. Oder: Für alle Aussagen gilt: Wenn A wahr ist, dann ist das Gegenteil (die Verneinung $\neg A$) falsch.

III. DAS PRICIPIUM EXCLUSII TERTII

Begriffslogische Fassung:

symbolisch:	$X = A \vee \neg A$, tertium non datur
in Worten:	Ein Jegliches ist entweder A oder nicht A, es kann kein Drittes sein.
Beispiel:	Eine Katze ist entweder tot oder lebendig, nichts Drittes ist möglich.

Prädikatenlogische Fassung: Ein beliebiges Ding x kann entweder nur die Eigenschaft a besitzen (und damit zur Klasse A gehören) oder sie nicht besitzen (und somit zur Komplementärklasse A' gehören); es gibt keine dritte Möglichkeit.

Aussagenlogische Fassung:

symbolisch:	$\vdash A \vee \neg A$ (Disjunktion)
in Worten:	Jede Aussage (Behauptung) ist entweder wahr oder falsch; etwas Drittes gibt es nicht. Oder: Für jede Aussage gilt, dass entweder sie selbst wahr ist oder ihr Gegenteil (ihre Negation), tertium non datur.

---

*) A stellt hier eine Variable in einer sog. Aussageform dar. Anstelle der Variablen A kann jede beliebige Aussage a eingesetzt werden. Das Zeichen $\vdash$ bedeutet: „gilt für jede beliebige Behauptung“ oder „ist wahr für alle Aussagen“. Die Zeichen $\neg$, $\wedge$, $\vee$ bedeuten „nicht“, „und“ bzw. „oder“ (*hier* im ausschließenden Sinne von „entweder-oder“)