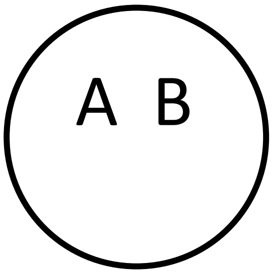
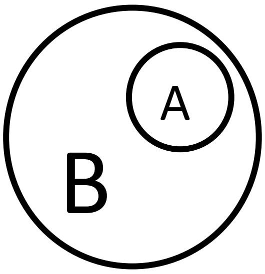
Diagramm-Darstellungen logischer Beziehungen

1. Die vier logischen Urteilsformen lassen sich durch sog. EULER-Diagramme darstellen



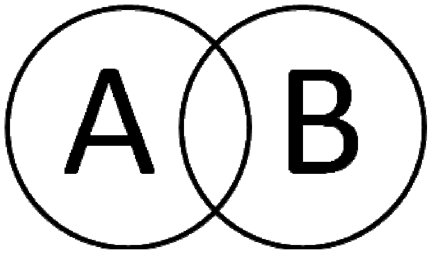
Alle A sind alle B

A = B



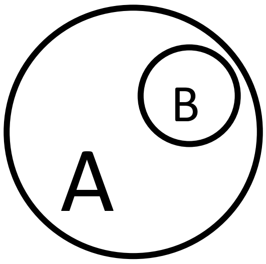
Alle A sind B (a-Urteil)

Einige B sind nicht A (o-Urteil)



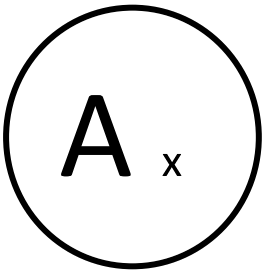
Einige A sind B / Einige B sind A (i-Urteil)

Einige A (bzw. B) sind nicht B (bzw.A) (o)



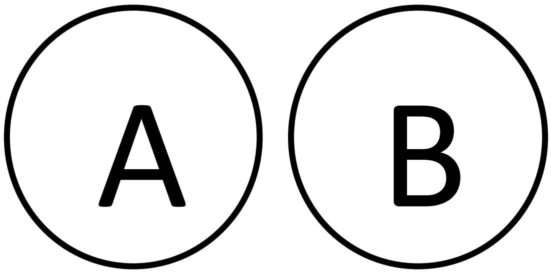
Alle B sind A (a)

Einige A sind nicht B (o)

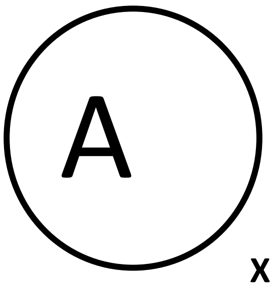


x ist ein A (x ∈ A)

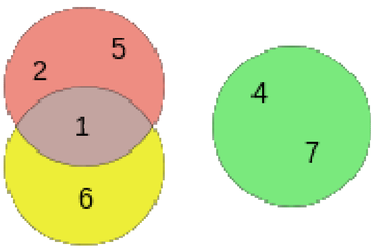
(Existenzialurteil)



Kein A ist B / Kein B ist A (e-Urteil)

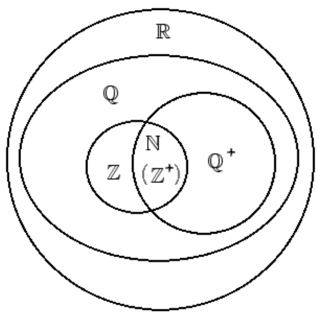


x ist kein A (x ∉A)



Euler-Diagramm für die Zahlen-Mengen

$\mathbb{C}$ = {1.2, 5}; $\mathbb{D}$ = {1, 6}; $\mathbb{E}$ = {4, 7}



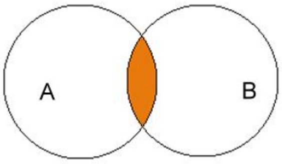
Euler-Diagramm der Zahlenbereiche

Wie man leicht erkennt, differenzieren die Euler-Diagramme nicht eindeutig z.B. zwischen a- und o- Urteilen (Beispiele 2und 4). Das Beispiel 3 lässt nicht weniger als vier Deutungen (i- und o-Urteile) zu. Das Urteil „Einige B sind nicht A“ kann z. B. durch verschiedenartige Diagramme (Beispiel 2 oder 3) dargestellt werden, obgleich die mengentheoretische Beziehung in beiden Fällen nicht die gleiche ist.

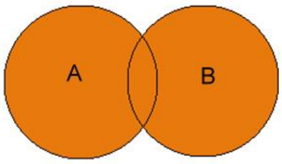
Diesen Mangel versucht man, durch eine andere Form der Darstellung zu beseitigen:

2. Darstellung durch <u>VENN-Diagramme</u>

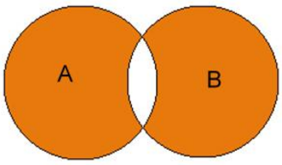
Venn-Diagramme stellen Relationen zwischen – zwei oder mehr – Mengen dar. Da die Axiomatik der Mengenlehre absolut äquivalent zu der der Aussagenlogik ist, kann man dieselben Diagramme auch als Darstellungen der *Verknüpfungen von Aussagen,* etwa p und q, betrachten.



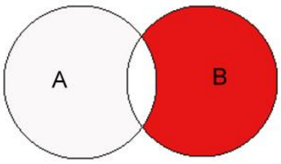
<u>Mengentheoretisch:</u> SCHNITTMENGE $\mathbf{A} \cap \mathbb{B}$
<u>Aussagenlogisch:</u> KONJUNKTION $p \wedge q$ (p und q: sowohl p als auch q)
Boole'sche Funktion: Z(9)= $X \odot Y$ (AND-Funktion)



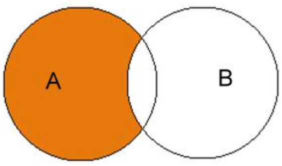
<u>Mengentheoretisch:</u> VEREINIGUNGSMENGE $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$
<u>Aussagenlogisch:</u> DISJUNKTION $p \vee q$ (p oder/und q)
Boole'sche Funktion: Z(15)= $X \oplus Y$ (OR-Funktion)



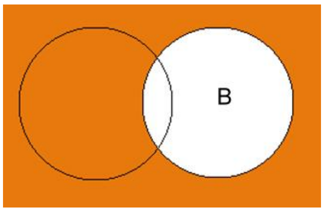
<u>Mengentheoretisch</u>: SYMMETRISCHE DIFFERENZ $\mathbf{A} \boxplus \mathbb{B}$
<u>Aussagenlogisch</u>: ANTIVALENZ $p \not\equiv q$: $(\neg p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$ (entweder – oder)
Boole'sche Funktion: Z(7)= $\overline{X} \odot Y \oplus X \odot \overline{Y}$



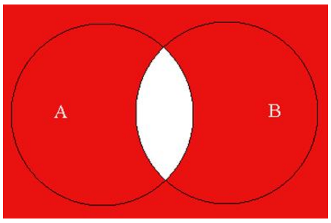
<u>Mengentheoretisch:</u> DIFFERENZ $\mathbf{B} \setminus \mathbf{A}$
<u>Aussagenlogisch:</u> INHIBITION von q: $q \wedge \neg p$ (q und nicht p)
Boole'sche Funktion: Z(5)= $\overline{X} \odot Y$



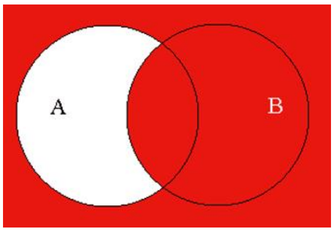
<u>Mengentheoretisch:</u> DIFFERENZ $\mathbf{A} \setminus \mathbb{B}$
<u>Aussagenlogisch:</u> INHIBITION von p: $p \wedge \neg q$ (p und nicht q)
Boole'sche Funktion: Z(3)= $X \odot \overline{Y}$



<u>Mengentheoretisch:</u> KOMPLEMENT von $\mathbf{B} = \underline{\mathbf{B}}$
<u>Aussagenlogisch:</u> NEGATION von q: $\neg q$ (nicht q)
Boole'sche Funktion: Z(4)= $\overline{Y}$
(entsprechend: das Komplement von A)

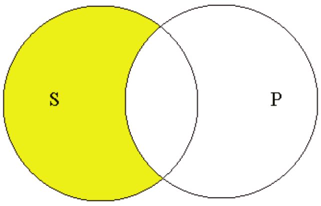


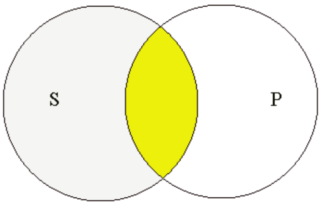
<u>Mengentheoretisch:</u> VEREINIGUNG der KOMPLEMENTÄRMENGEN $\underline{\mathbf{A}} \cup \underline{\mathbf{B}}$
<u>Aussagenlogisch</u>: NAND $p \,|\, q$: $\neg p \wedge \neg q$ (nicht sowohl…als auch)
Boole'sche Funktion: Z(8)= $\overline{X} \oplus \overline{Y}$ (Shefferfunktion)



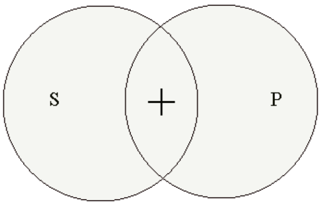
<u>Mengentheoretisch:</u> VEREINIGUNG von B mit dem Komplement von A: $\underline{\mathbf{A}} \cup \mathbb{B}$
<u>Aussagenlogisch:</u> IMPLIKATION $p \rightarrow q$: $\neg p \vee q$ (wenn – dann)
Boole'sche Funktion: Z(14)= $\overline{X} \oplus Y$

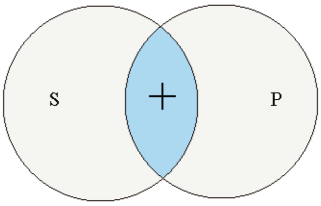
Die Fläche, die nach Ausführung der jeweiligen Operation entsteht, wir stets rot eingefärbt. Bei der Darstellung der vier Urteilsformen (die z. B. in Syllogismen vorkommen), verfährt man jedoch *völlig anders*! Die Grundfigur, die jeweils den Subjekts- und den Prädikatsbegriff eines Urteils (z. B. „Alle S sind P", SaP) darstellt, ist stets die gleiche. Farblich ausgefüllt (rot oder – hier – gelb) werden jedoch die *ausgeschlossenen* Bereiche in der Figur. Beispielsweise zeigt das Diagramm für das universal-positive Urteil „Alle S sind P" dieses Bild:

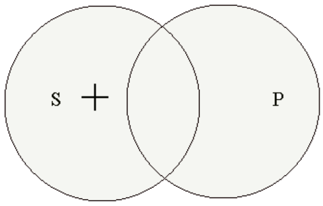




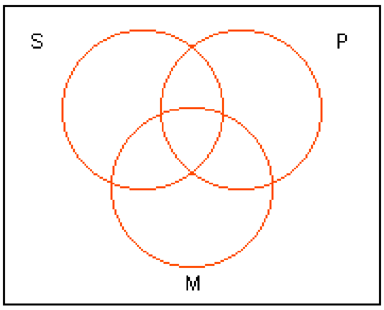
Man darf dieses Diagramm nicht mit einem klassischen Mengendiagramm verwechseln! Zu lesen ist es vielmehr so, dass die gesamte gelbe Fläche der „Menge" S *leer* ist, und zur Menge S nur der Bereich gehört, der der Schnittmenge aus S und P entspricht. Genau dann nämlich sind *alle* S-Elemente auch P-Elemente. Aus dem gleichen Grund ist das zweite Diagramm die Darstellung des Universal-negativen Urteil „Kein S ist P" (SeP): da die gelbe Fläche ausgeschlossen wird, also leer ist, ist kein S-Element ein P-Element. Wie aber verfährt man nun mit partikulären Urteilen? Man könnte hier die „besetzten" Bereiche mit einer zweiten Farbe markieren, aber üblicherweise zieht man es vor, diese Bereiche lediglich durch ein + zu kennzeichnen, um Verwechslungen zu vermeiden. Unten finden wir das SiP-Urteil „Einige S sind P" – einmal mit Kreuz, einmal mit alternativer Färbung – sowie das SoP-Urteil „Einige S sind nicht P".

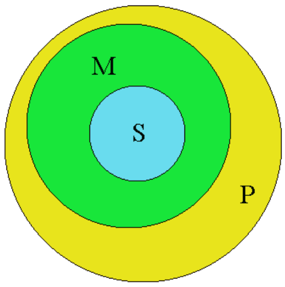






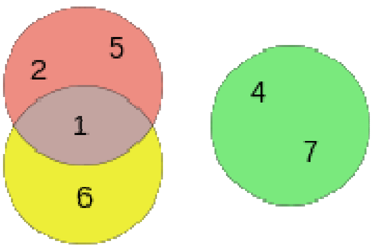
Ein Syllogismus besteht bekanntlich aus *drei* solchen Urteilen, die die Begriffe S, P und M miteinander verknüpfen. Das Venn-Diagramm für einen Syllogismus ist wiederum stets die gleiche Figur, nämlich diese:

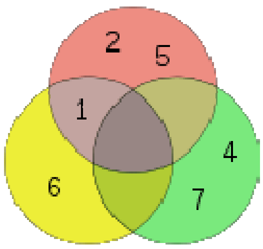




Venn Euler (zum Vergleich)

Die Vorzüge dieser Darstellung erkennt man, wenn man nochmals das Euler-Diagramm für die drei Mengen $\mathbb{C}$ = {1.2, 5}; $\mathbb{D}$ = {1, 6}; $\mathbb{E}$ = {4, 7} mit dem entsprechenden Venn-Diagramm vergleicht:



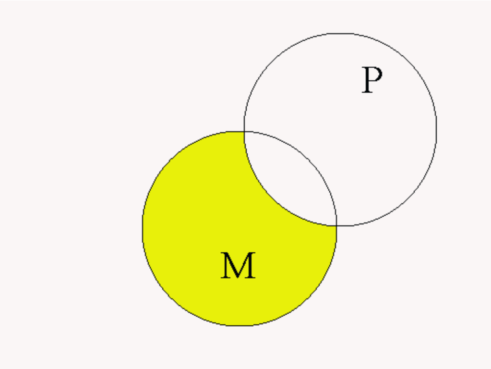


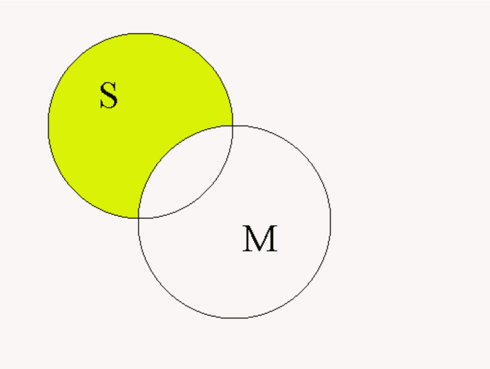
Während in Euler-Diagrammen nur die tatsächlichen Überschneidungen zwischen den Mengen zu sehen sind, werden in Venn-Diagrammen alle möglichen Überlappungen der Flächen dargestellt (auch wenn diese keine Objekte enthalten); und es ist klar ersichtlich, dass nur zwei dieser Mengen *ein* Element gemeinsam haben, nämlich die 1.

Der Syllogismus im Modus barbara lautet:

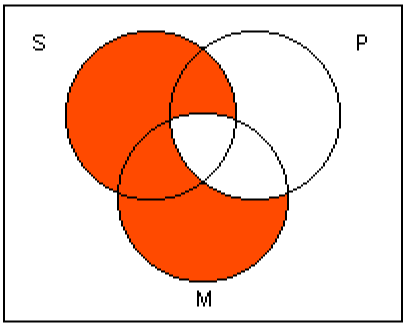
Alle M sind P (MaP)
<u>Alle S sind M (SaM)</u>
Alle S sind P (SaP)

Wie oben gezeigt, sehen die Venn-Diagramme für die beiden Prämissen wie folgt aus:

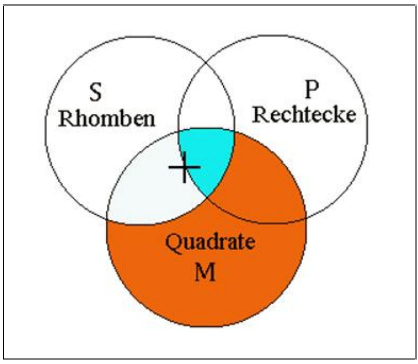




Wenn wir diese beiden zusammenfügen, erhalten wir das Venn-Diagramm für den Modus barbara, wobei wir die ausgeschlossenen Bereich diesmal nur *rot* eingefärbt haben:

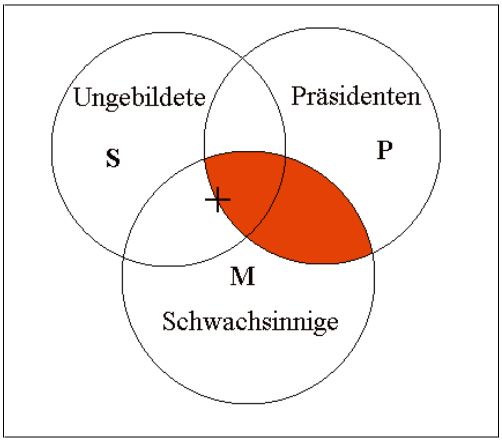


Die Conclusio „Alle S sind P" ist klar erkennbar, denn das Bild weist keinen S-Bereich außerhalb von P aus.
Das Venn-Diagramm für den Modus darii sieht wie folgt aus:



Ein Beispiel dafür: Alle Quadrate sind Rechtecke	**Alle M sind P (MaP)**
<u>Einige Rhomben sind Quadrate</u>	**<u>Einige S sind M (SiM)</u>**
Einige Rhomben sind Rechtecke	**Einige S sind P (SiP)**

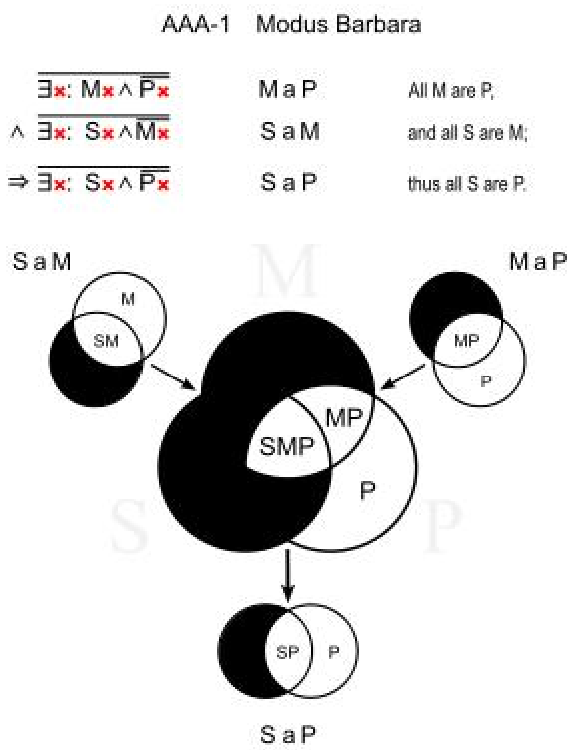
Ein weiteres Beispiel für einen EIO-Schluss: Modus ferio

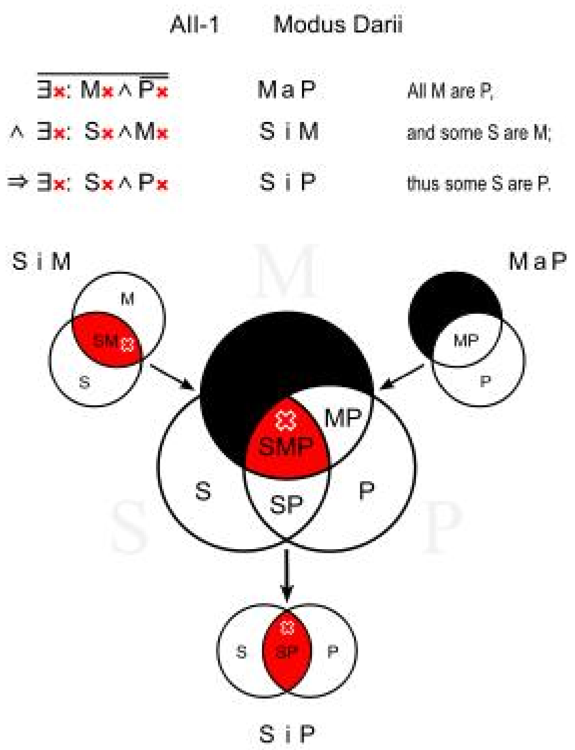


Kein Präsident ist schwachsinnig
<u>Einige ungebildete Leute sind schwachsinnig</u>
Einige Ungebildete sind keine Präsidenten

Da die rote Fläche leer ist, gibt es in der Tat keinen Bereich von S (Ungebildete), der auch zu P (Präsidenten) gehört.

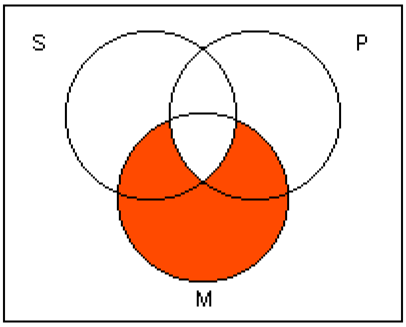
Venn-Diagramme können sogar zum graphischen Beweis der Gültigkeit von Syllogismen dienen.
Zwei Beispiele dafür:





Hier sind die Bereiche, für die kein Element existiert, schwarz gefärbt.
In den roten Bereichen aber existiert mindestens eins.

Das Venn-Diagramm für den Modus darapti



liefert übrigens keine Schlussfolgerung "Einige S sind P", denn wir finden kein + im Bereich von S und P. Das liegt daran, dass der Modus darapti nur unter der Voraussetzung eines nichtleeren Mittelbegriffs gültig ist.

Abschliessend noch einige Darstellungen von Venn-Diagrammen mit mehr als drei Mengen: